Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 21 XII 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że M_n jest martyngałem takim, że $M_0 = 0$ oraz $|M_n - M_{n-1}| \leqslant c_n$ dla pewnych stałych c_n. Wykazać, że dla dowolnego $\beta > 0$ zachodzi

$$\mathbb{E}e^{\beta M_n} \leqslant \exp\left\{\frac{\beta^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right\}$$

i wywnioskować stąd, że dla dowolnego $\lambda > 0$ spełniona jest nierówność

$$\mathbb{P}\left(|M_n| > \lambda\right) \leqslant 2\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right\}.$$

Zadanie 2. Urna zawiera początkowo b_0 kul białych i c_0 kul czarnych, $b_0, c_0 \geqslant 1$. W każdym kroku losujemy z urny jedną kulę, zwracamy ją, a następnie dokładamy do urny m kul tego samego koloru. Niech b_n i c_n oznaczają liczbę białych i czarnych kul po n losowaniach. Definiujemy $M_n = \frac{b_n}{b_n + c_n}$. Wykazać, że M_n jest martyngałem zbieżnym prawie na pewno oraz wyznaczyć $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}M_n$.

Zadanie 3. Niech $X_i^{(n)}$, $i, n \geqslant 1$, będą niezależnymi zmiennymi o jednakowymi rozkładzie i wartościach całkowitych nieujemnych. Określamy *proces Galtona-Watsona* $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ w następujący sposób – $Z_0 = 1$, a dla następnie

$$Z_{n+1} = \begin{cases} X_1^{(n+1)} + \ldots + X_{Z_n}^{(n+1)}, & Z_n > 0 \\ 0, & Z_n = 0. \end{cases}$$

Niech $\mu = \mathbb{E}X_i^{(n)}$ i załóżmy, że $\mu \in (0, \infty)$.

(a) Wykazać, że $\frac{Z_n}{\mu^n}$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_i^m : i \geqslant 1, 1 \leqslant m \leqslant n\right)$.

(b) Wykazać, że jeśli $\mu < 1$, to $Z_n = 0$ prawie na pewno dla dostatecznie dużych n.

(c) Wykazać, że jeśli $\mu = 1$ i $\mathbb{P}\left(X_i^{(n)} = 1\right) < 1$, to $Z_n = 0$ prawie na pewno dla dostatecznie dużych n.

(d) Wykazać, że jeśli $\mu > 1$, to $\mathbb{P}\left(Z_n > 0 \text{ dla każdego } n\right) > 0$.