

Rachunek prawdopodobieństwa II  
semestr zimowy 2023/2024  
zadania na ćwiczenia, 5 X 2023

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Wykazać, że dla dowolnych  $x_n, x \in \mathbb{R}$  mamy  $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_n \rightarrow x$ .

**Zadanie 2.** Załóżmy, że zmienne losowe  $X_n, X$  przyjmują tylko wartości całkowite.

- (a) Wykazać, że  $X_n \Rightarrow X$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  zachodzi  $\mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(X = k)$ .
- (b) Załóżmy, że dla dowolnego  $k \in \mathbb{Z}$  istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ . Czy wynika stąd zbieżność  $X_n$  według rozkładu?

**Zadanie 3.** Niech  $X_1, X_2, \dots$  będą zmiennymi losowymi zdefiniowanymi w następujący sposób

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{2j}{n(n+1)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Wykazać, że ciąg  $X_n$  jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć granicę.

**Zadanie 4.** Wykazać, że zmienne losowe mające gęstości mogą zbiegać do stałej.