

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 14.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że nie istnieje funkcja $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$, która byłaby holomorficzną wewnątrz dysku jednostkowego, ciągłą na domkniętym dysku jednostkowym oraz spełniałaby warunek $f(z) = \frac{1}{z}$ na okręgu jednostkowym.

Zadanie 2. Udowodnić, że nie istnieje ciąg wielomianów przybliżających na okręgu jednostkowym w normie supremum funkcję $f(z) = \bar{z}$.

Zadanie 3. Rozważmy wielomian $p(z) = c \prod_{i=1}^n (z - z_i)$.

(a) Wykazać, że jeśli dla danego $w \in \mathbb{C}$ mamy $p(w) \neq 0$, to $\frac{p'(w)}{p(w)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{w - z_i}$.

(b) Wywnioskować, że każdy pierwiastek wielomianu $p'(z)$ należy do otoczki wypukłej zbioru pierwiastków wielomianu $p(z)$.

Zadanie 4. Niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną na otoczeniu dysku $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Niech $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, gdzie $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Wykazać, że

$$\int_{D_R} (u(x, y) + iv(x, y)) \, dx \, dy = \pi R^2 f(0).$$

Zadanie 5. Wykazać, że funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ określona na zbiorze $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ wzorem $f(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+iz}{1-iz}$ jest poprawnie określoną gałęzią funkcji arctg , tzn. jest ona ciągła w D i spełnia równanie $\operatorname{tg} f(z) = z$.

Zadanie 6. Dla $a < b$ niech $U = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im} z < b\}$. Załóżmy, że funkcja ciągła i ograniczona $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną w U . Wykazać, że jeśli $|f(z)| \leq 1$ na ∂U , to ta sama nierówność jest spełniona również na całym zbiorze U .