

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 11.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Dla $a \notin i\mathbb{Z}$ wykazać tożsamość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \operatorname{ctgh} \pi a - \frac{1}{a^2} \right).$$

Wskazówka: scałkować funkcję $f(z) = \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2}$ po brzegu kwadratu Q_N o wierzchołkach w punktach $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$.

Zadanie 2. Wykazać tożsamość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wskazówka: scałkować funkcję $f(z) = \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^2}$ po konturze jak w zadaniu 1.

Zadanie 3. Dla $a \notin i\mathbb{Z}$ wykazać tożsamość

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}.$$

Wskazówka: scałkować funkcję $f(z) = \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{(z-a)^2}$ po konturze jak w zadaniu 1.