

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2025/2026
zadania na ćwiczenia, tydzień 10.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $f, g : D(a, r) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ są funkcjami holomorficznymi, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$ (lub $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = \infty$) oraz istnieje (być może niewłaściwa) granica $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$, to wówczas istnieje granica $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)}$ i obie te granice są sobie równe.

Zadanie 2. Obliczyć residua:

- (a) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z+z^2}$
- (b) $\operatorname{res}_{z=1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$
- (c) $\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4+a^4}$, gdzie $z_0^4 + a^4 = 0$
- (d) $\operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2) \cosh \frac{\pi z}{2}}$

Zadanie 3. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{1-z}$ w szereg Taylora oraz w szereg Laurenta wokół $z = 0$ i określić, na jakim zbiorze szeregi te są zbieżne.

Zadanie 4. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$:

- (a) w szereg Taylora wokół $z = 0$ w dysku $\{|z| < 1\}$
- (b) w szereg Laurenta wokół $z = 0$ w pierścieniu $\{1 < |z| < 2\}$
- (c) w szereg Laurenta wokół $z = 0$ w zbiorze $\{|z| > 2\}$

Zadanie 5. Wykazać, że na zbiorze $U = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$ można określić gałąź funkcji $\sqrt{z^2 - 1}$, tzn. taką funkcję holomorficzną $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, że $f(z)^2 = z^2 - 1$. Dla gałęzi spełniającej $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 1$ znaleźć jej rozwinięcie w szereg Laurenta wokół 0.