Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania domowe, seria 5.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w czwartek **23 I 2025.**

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną spełniającą $|f(z)| = 1$ dla każdego $z \in \mathbb{R}$. Wykazać, że f nie ma żadnych miejsc zerowych.

Zadanie 2. Korzystając z twierdzenia o residuach obliczyć całki:

(a) $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{1+z^4}\, dz$, $\Gamma = \partial D(1,1)$

(b) $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)}\, dz$, $\Gamma = \partial D(0,2)$

(c) $\int\limits_{\Gamma} z^2 e^{1/z}\, dz$, $\Gamma = \partial D(0,1)$

(d) $\int\limits_{\Gamma} \frac{z^2}{\exp(2\pi i z^3) - 1}\, dz$, $\Gamma = \partial D(0,R)$

Zadanie 3. Korzystając z metod analizy zespolonej obliczyć całkę

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

Zadanie 4. Rozważmy funkcję $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(2+z^2)}$. Rozwinąć f w szereg Laurenta a) w pierścieniu $\{1 < |z| < \sqrt{2}\}$, b) w zbiorze $\{|z| > \sqrt{2}\}$.