Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania domowe, seria 4.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w czwartek **12 XII 2024.**

Zadanie 1. Obliczyć następujące całki:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z \cos z \sin z}{z^2+1}\,dz$, gdzie Γ jest okręgiem o środku w $1+i$ i promieniu $3/2$

(b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,dz$, gdzie Γ jest okręgiem o równaniu $x^2+y^2-2x=0$

Zadanie 2. Korzystając z tożsamości

$$\frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - \ldots - (-1)^{n-1}w^{n-1} + (-1)^n\frac{w^n}{1+w}$$

pokazać, że dla $z = e^{it}$, $t \in (-\pi, \pi)$, zachodzi wzór

$$\mathrm{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + R_n(z),$$

gdzie $R_n(z) = (-1)^n \displaystyle\int_{[0,z]} \frac{w^n}{1+w}\,dw$. Wywnioskować stąd dla $t \in (-\pi, \pi)$ wzór

$$\mathrm{Log}(1+e^{it}) = e^{it} - \frac{e^{2it}}{2} + \frac{e^{3it}}{3} - \ldots,$$

a następnie wzór

$$\frac{t}{2} = \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \ldots$$

Zadanie 3. Niech $f : U \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną na otoczeniu dysku $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$. Niech $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, gdzie $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wykazać, że

$$\int_{D_R} (u(x,y) + iv(x,y))\,dx\,dy = \pi R^2 f(0).$$

Zadanie 4. Wykazać, że funkcja $f : D \to \mathbb{C}$ określona na zbiorze $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ wzorem $f(z) = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\frac{1+iz}{1-iz}$ jest poprawnie określoną gałęzią funkcji arctg, tzn. jest ona ciągła w D i spełnia równanie $\mathrm{tg}\, f(z) = z$.