

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania domowe, seria 2.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w czwartek **7 XI 2024**.

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie funkcje harmoniczne $u : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ stałe na promieniach postaci $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg} z = \text{const}\}$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ różniczkowalną w punkcie z_0 . Dowieść, że funkcja $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ jest różniczkowalna w punkcie \bar{z}_0 .

Zadanie 3. Załóżmy, że $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ są funkcjami holomorficznymi takimi, że $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} g$ oraz $g'(0) = i$. Udowodnić, że wówczas $f'(0) = 1$.

Zadanie 4. Udowodnić, że na płaszczyźnie zespolonej każdy dysk o promieniu $\pi\sqrt{2}$ zawiera punkt $z \in \mathbb{C}$ taki, że $\cos z \in \mathbb{Z}$.