

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania domowe, seria 1.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w czwartek **17 X 2024**.

Zadanie 1. Rozpatrzmy funkcję $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ daną wzorem $g(z) = \frac{z^2+1}{2z}$. Wykazać, że przeciwobraz przedziału $[-1, 1]$ przy odwzorowaniu g jest okręgiem.

Zadanie 2. Wykazać, że homografia $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ przekształca górną półpłaszczyznę \mathbb{H}_+ na dysk jednostkowy D . Jak wyglądają przy tym przekształceniu obrazy prostych $\operatorname{Re} z = \text{const}$, $\operatorname{Im} z = \text{const}$ oraz okręgów $|z| = \text{const}$?

Zadanie 3. Niech S będzie okręgiem lub prostą i niech T będzie okręgiem lub prostą. Udowodnić, że istnieje homografia przeprowadzająca S na T .

Zadanie 4. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych znaleźć dla ustalonego $\theta \in \mathbb{R}$ jawną postać sum

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin k\theta.$$