Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania na ćwiczenia, tydzień 9.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Obliczyć poniższe całki dla konturu Γ będącego dodatnio zorientowanym trójkątem o wierzchołkach $0, 1$ oraz $1 + i$:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma e^z \, dz$

(b) $\displaystyle\int_\Gamma e^{\bar{z}} \, dz$

Zadanie 2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{1+z^2} \, dz$ dla konturu Γ będącego:

(a) okręgiem o środku w 0 i promieniu $\frac{1}{2}$

(b) okręgiem o środku w 0 i promieniu 2

Zadanie 3. Dla $r > 0$ niech $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ będzie drogą określoną równaniem $\gamma_r(t) = re^{it}$. Wykazać, że

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} \, dz = 0.$$

Zadanie 4. Niech $f(z) = z^3$, $z_1 = 1$, $z_2 = i$. Wykazać, że nie istnieje $w \in [z_1, z_2]$ takie, że $\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} = f'(w)$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną na obszarze U. Rozpatrzmy dowolne $a, b \in U$ takie, że $[a, b] \subseteq U$ i niech Γ będzie obrazem krzywej $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ zadanej jako $\gamma(t) = f'((1-t)a+tb)$. Wykazać, że istnieje $w \in \operatorname{conv} \Gamma$ takie, że $f(b) - f(a) = (b-a)w$.