Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania na ćwiczenia, tydzień 5.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną. Wykazać, że jeśli $g(z) = \bar{f}(z)$ jest holomorficzna, to f jest stała.

Zadanie 2. Rozważmy $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Wykazać tożsamości $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ oraz $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

(b) Wykazać tożsamości $|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x$ oraz $|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x$.

(c) Wykazać nierówność $|\operatorname{tg} z|^2 \leqslant 1 + \frac{1}{\sinh^2 y}$.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli $|z| \leqslant r$, to $|\sin z| \leqslant \cosh r$ oraz $|\cos z| \leqslant \cosh r$.

Zadanie 4. Wyznaczyć maksymalny zbiór, na jakim funkcja $f(z) = \sin z$ jest różnowartościowa.