Funkcje analityczne

semestr zimowy 2024/2025

zadania na ćwiczenia, tydzień 4.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać różniczkowalność w sensie zespolonym funkcji:

(a) $f(z) = \bar{z}$

(b) $f(z) = z \operatorname{Re} z$

(c) $f(z) = |z|^2$

Zadanie 2. Załóżmy, że $f = u + iv$, gdzie $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$, jest funkcją holomorficzną na pewnym obszarze $U \subseteq \mathbb{C}$. Udowodnić, że jeżeli $u^2 = v$, to f jest stała na U.

Zadanie 3. Niech $f = u + iv$. Wykazać, że jeśli f jest różniczkowalna (w sensie zespolonym) w $z_0 \in \mathbb{C}$, to $\langle \nabla u(z_0), \nabla v(z_0) \rangle = 0$. Podać interpretację geometryczną tego faktu.

Zadanie 4. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ określoną następująco:

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ |z|^{-2}(1+i) \operatorname{Im} z^2, & z \neq 0. \end{cases}$$

Udowodnić, że pochodne cząstkowe $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna w $z = 0$. Czy f jest różniczkowalna w $z = 0$?

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie funkcje harmoniczne $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, które są na stałe na okręgach o środku w 0.