Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania na ćwiczenia, tydzień 3.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy $z \in \mathbb{C}$ takie, że $\operatorname{Re} z < 0$. Wykazać, że ciąg

$$z_n = (1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{z}{n}\right)$$

jest zbieżny do 0. Podać przykład takiego z, że $\operatorname{Re} z = 0$, ale zbieżność z_n nie zachodzi.

Zadanie 2. Załóżmy, że $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ są ciągami liczb zespolonych.

(a) Wykazać, że dla $s_n = z_1 + \ldots + z_n$ zachodzi wzór na sumowanie przez części – dla dowolnego $m \geqslant 2$ mamy

$$\sum_{n=1}^{m} a_n z_n = \sum_{n=1}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) s_n + a_m s_m.$$

(b) Wykazać, że jeśli ciąg a_n jest rzeczywisty, nierosnący oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to z ograniczoności ciągu s_n wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_n a_n z_n$.

Zadanie 3. Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest rozbieżny dla $z = 1$, natomiast zbieżny dla wszystkich pozostałych z takich, że $|z| = 1$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest szeregiem potęgowym, który dla wszystkich $z \in (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, przyjmuje wartości rzeczywiste. Wykazać, że wówczas wszystkie współczynniki a_n są liczbami rzeczywistymi.