Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania na ćwiczenia, tydzień 2.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Naszkicować zbiory na płaszczyźnie zespolonej zadane w następujący sposób:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = |z-b|\}$, $a \neq b$

(b) $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Arg}\frac{z+i}{z-i} < \frac{\pi}{4}\right\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re} iz < 1\}$

Zadanie 2. Wykazać, że obrazem okręgu lub prostej przy inwersji $z \mapsto \frac{1}{z}$ jest okrąg lub prosta.

Zadanie 3. Wykazać, że dowolną homografię $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ można przedstawić jako złożenie przesunięcia ($z \mapsto z + \alpha$), inwersji ($z \mapsto \frac{1}{z}$) i podobieństwa ($z \mapsto Az + B$).

Zadanie 4. Rozpatrzmy dwie homografie $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ oraz $g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$.

(a) Wykazać, że ich złożenie $f \circ g$ również jest homografią.

(b) Wykazać, że jeżeli $ad - bc \neq 0$, to f jest bijekcją rozszerzonej płaszczyzny zespolonej $\bar{\mathbb{C}}$. Wywnioskować, że homografie spełniające $ad - bc \neq 0$ tworzą grupę.

(c) Niech $SL(2, \mathbb{C}) = \{M \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \det M = 1\}$. Oznaczmy grupę wszystkich homografii spełniających $ad - bc \neq 0$ przez H. Wykazać, że odwzorowanie $\phi : SL(2, \mathbb{C}) \to H$ dane jako
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\phi}{\mapsto} f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
jest homomorfizmem i surjekcją. Wykazać, że $\ker \phi = \{\pm I\}$ i wywnioskować stąd, że zachodzi izomorfizm grup $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\} \simeq H$.

Zadanie 5. Wykazać, że obrazem okręgu lub prostej przy homografii jest okrąg lub prosta. Udowodnić, że jeśli T jest okręgiem lub prostą i S jest okręgiem lub prostą, to istnieje homografia przeprowadzająca T na S.

Zadanie 6. Wykazać, że każda homografia h różna od identyczności ma co najmniej jeden i co najwyżej dwa punkty stałe w $\bar{\mathbb{C}}$. Wykazać, że jeżeli jedynym punktem stałym h jest ∞, to $h(z) = z + b$ dla pewnego $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, natomiast jeśli punktami stałymi h są 0 i ∞, to $h(z) = az$ dla pewnego $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0, 1$.