Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania na ćwiczenia, tydzień 13.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech $f : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą określoną w górnej półpłaszczyźnie domkniętej. Niech Γ_R oznacza półokrąg $\{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$. Wykazać, że jeśli f jest postaci $f(z) = e^{iaz}g(z)$ dla $a > 0$, to zachodzi oszacowanie

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \right| \leqslant \frac{\pi}{a} M_R,$$

gdzie $M_R = \sup_{t \in [0,\pi]} |g(Re^{it})|$. Wywnioskować, że jeśli $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$, to mamy

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0.$$

Zadanie 2. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin(x^2)\, dx = \int_{0}^{\infty} \cos(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}$