Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania na ćwiczenia, tydzień 12.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $f : U \to \mathbb{C}$ określona na pewnym otoczeniu 0 jest holomorficzna, to warunek $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$ może być spełniony tylko dla skończenie wielu liczb naturalnych n.

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli $f : U \to \mathbb{C}$ określona na pewnym otoczeniu 0 jest holomorficzna, to warunek $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$ może być spełniony tylko dla skończenie wielu liczb naturalnych n.

Zadanie 3. Załóżmy, że U jest ograniczonym, otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$, a $f : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną przedłużającą się do funkcji ciągłej na $\overline{U}$. Wykazać, że jeśli moduł f jest stały na ∂U, to albo f jest stała, albo posiada w U co najmniej jedno miejsce zerowe.

Zadanie 4. Załóżmy, że wielomian $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ spełnia $\max\limits_{|z|=1} |P(z)| = 1$. Wykazać, że wówczas $P(z) = z^n$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną określoną na pewnym otoczeniu dysku jednostkowego D. Wykazać, że jeśli $f(\partial D) \subseteq \mathbb{R}$, to f jest funkcją stałą.