Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania na ćwiczenia, tydzień 11.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie funkcje holomorficzne $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ spełnione jest równanie $|f(z) - f'(z)| = 1$.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną. Obliczyć całkę

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz,$$

gdzie D jest dyskiem o środku w 0 i promieniu r, a $a, b \in D$. Wywnioskować stąd twierdzenie Liouville'a.

Zadanie 3. Wyznaczyć krotność każdego z miejsc zerowych funkcji $f(z) = (\sin z - 1)^2 \sin z$.

Zadanie 4. Obliczyć następujące całki:

(a) $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{(\sin z - 1)^2 \sin z}\, dz$, gdzie Γ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu 1

(b) $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{(\sin z - 1)^2 \sin z}\, dz$, gdzie Γ jest okręgiem o środku w $\frac{\pi}{2}$ i promieniu 1