Funkcje analityczne

semestr zimowy 2024/2025

zadania na ćwiczenia, tydzień 10.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną określoną na obszarze wypukłym U i dla każdego $z \in U$ zachodzi $\mathrm{Re} f'(z) > 0$. Wykazać, że f jest funkcją różnowartościową.

Zadanie 2. Wykazać, że funkcja $f(z) = z^n + nz + a$, gdzie $n \geqslant 1$, $a \in \mathbb{C}$, jest różnowartościowa w kole jednostkowym.

Zadanie 3. Obliczyć następujące całki:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\, dz$, gdzie Γ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu 2

(b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{z^4-1}\, dz$, gdzie Γ jest okręgiem o środku w a i promieniu a, $a > 0$

(c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{(z-b)(z-a)^m}\, dz$, $m \geqslant 1$, gdzie Γ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu r, $|a| < r < |b|$

Zadanie 4. Załóżmy, że D jest dyskiem otwartym, a funkcja $f : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna we wnętrzu swojej dziedziny, ciągła na ∂D i spełnia warunek $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Wykazać, że $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\, dz = 0$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $P(z)$ i $Q(z)$ są dwoma wielomianami, przy czym $\deg Q > \deg P + 1$. Wykazać, że $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0$ dla każdego dysku zawierającego wszystkie zera wielomianu Q.