

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2024/2025
zadania na ćwiczenia, tydzień 1.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające równanie $z^2 - 5 + 12i = 0$.

Zadanie 2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi tożsamość

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

i podać jej interpretację geometryczną.

Zadanie 3. Wykazać, że zorientowane pole trójkąta wyznaczonego przez trzy liczby zespolone $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ wynosi

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1).$$

Zadanie 4. Wykazać, że zorientowane pole wielokąta wyznaczonego przez liczby zespolone $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ wynosi

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \dots + \bar{z}_n z_1).$$

Zadanie 5. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$ daną wzorem $f(z) = \frac{1}{i-z}$. Wyznaczyć $f(D)$, gdzie $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ jest otwartym dyskiem jednostkowym.