Funkcje analityczne

semestr zimowy 2019/2020

zadania domowe, seria 5.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach we wtorek **7 stycznia.**

Zadanie 1. Niech $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem stopnia n i niech $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |P(z)|$. Wykazać, że dla $0 < r < s$ mamy

$$\frac{M(r)}{r^n} \geqslant \frac{M(s)}{s^n},$$

a równość zachodzi tylko jeśli $P(z) = az^n$ dla pewnego $a \neq 0$.

Zadanie 2. Niech $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ i niech W_n oznacza zbiór wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg S i mającego punkt $z = r$ jako jeden z wierzchołków.

(a) Dowieść, że jeśli f jest funkcją ciągłą określoną na S, to zachodzi wzór

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \frac{f(z)}{z}\, dz = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{w \in W_n} f(w).$$

(b) Dla $p \notin S$ wyznaczyć całkę $\int\limits_S \frac{\ln|p-z|}{z}\, dz$.

(c) Wykazać, że jeśli $g = e^f$ dla pewnej funkcji f holomorficznej w otoczeniu koła $\{|z| \leqslant r\}$, to $|g(0)| = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{w\in W_n} |g(w)|^{1/n}$.

Zadanie 3. Niech f będzie funkcją holomorficzną na pewnym otoczeniu otwartego dysku jednostkowego $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Załóżmy, że $|f(z)| < 1$ dla $z \in D$ oraz $f(0) = 0$. Wykazać, że albo $|f(z)| < |z|$ dla $z \in D \setminus \{0\}$, albo $f(z) = e^{i\alpha} z$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Dla ustalonych $a, b \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ oraz $|a| < r < |b|$ obliczyć

$$\int\limits_{D_r} \frac{1}{(z-a)(z-b)^m}\, dz,$$

gdzie $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

Zadanie 5. Niech $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_k \in \mathbb{C}$ i niech $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$. Wykazać, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \overline{P(z)}\, dz = r^2 \overline{P'(0)}.$$