Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania domowe, seria 3.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w piątek **15 XI 2019.**

Zadanie 1. Dla każdej z poniższych funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sprawdzić, czy istnieje jej różniczka w zerze, a jeśli tak, to znaleźć jej postać:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Zadanie 2. Ustalmy $p, q > 0$. Zbadać różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danej wzorem:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/q}$$

w zależności od p i q.

Zadanie 3. Dla $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ rozpatrzmy funkcję różniczkowalną $f : U \to \mathbb{R}$.

(a) Wykazać, że jeśli $f(x,y) = g\left(\frac{x^2}{y}\right)$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, to dla dowolnego $(x,y) \in U$ zachodzi tożsamość:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

(b) Wykazać, że jeśli dla dowolnego $(x,y) \in U$ zachodzi tożsamość:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

to $f(x,y) = g\left(\frac{x^2}{y}\right)$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Wyznacz kresy funkcji $f(x,y,z) = 6xy - 3xz - 2yz$ na zbiorze $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \in [0,1]\}$.

Zadanie 5. Załóżmy, że funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełnia $df(0,0,0) = [1,2,3]$ oraz $df(1,1,1) = [-1,-2,-3]$. Funkcja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$g(x,y,z) = f(e^{-x} + y, e^y - z, e^z - x).$$

Obliczyć pochodną kierunkową funkcji g w punkcie $(0,0,0)$ w kierunku wektora $v = [2,1,1]$.