Analiza matematyczna II.1
semestr zimowy 2019/2020
zadania domowe, seria 1.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w piątek **18 X 2019.**

Zadanie 1. Dla ustalonego $p \in (0,1)$ określamy funkcję $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ wzorem

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Udowodnić, że dla pewnej stałej $K_p > 0$ funkcja ta spełnia dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ własności:

(a) $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$,

(b) $\forall t \in \mathbb{R}\ \|tx\|_p = |t| \cdot \|x\|_p$,

(c) $\|x+y\|_p \leqslant K_p(\|x\|_p + \|y\|_p)$.

Zadanie 2. Rozstrzygnąć, czy następujące funkcje zadają normę na $\mathbb{R}^3$:

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+9y^2+z^2}$,

(b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+9y^2+z^2} + |x+y|$,

(c) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^3+z^3+|y|}$,

(d) $f(x,y,z) = \max\{\sqrt{x^2+y^2}, |z|\}$.

Zadanie 3. Rozpatrzmy w $\mathbb{R}^2$ iloczyn skalarny zadany macierzą $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Niech $\|\cdot\|$ oznacza normę pochodzącą od tego iloczynu skalarnego, a $\|\cdot\|_2$ – standardową normę euklidesową na $\mathbb{R}^2$. Obliczyć $\sup\limits_{v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{\|v\|}{\|v\|_2}$ oraz $\inf\limits_{v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{\|v\|}{\|v\|_2}$.

Zadanie 4. Rozpatrzmy w $\mathbb{R}^2$ zbiór B będący sześciokątem foremnym o boku długości 1 i jednym z wierzchołków w punkcie $(1,0)$. Niech $\|\cdot\|$ będzie normą w $\mathbb{R}^2$, dla której zbiór B jest kulą jednostkową. Czy norma ta pochodzi od iloczynu skalarnego? Wyznaczyć normę wektora $v = (5,0)$ oraz $w = (3, \sqrt{3})$.

Zadanie 5. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos((x+y)^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Czy funkcja ta jest ciągła w punkcie $(0,0)$?