

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2025/2026
zadania na ćwiczenia, 27 II 2026

Michał Kotowski

Zadanie 1. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

jest

- (a) ciągła na $\mathbb{R}$?
- (b) różniczkowalna na $\mathbb{R}$?
- (c) różniczkowalna i ma ciągłą pochodną na $\mathbb{R}$?

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, różniczkowalną na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz że granice pochodnych jednostronnych $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ istnieją i są sobie równe. Wykazać, że wówczas f jest różniczkowalna w 0.

Zadanie 3. Udowodnić nierówności:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Zadanie 4. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x) = f'(x)$. Wykazać, że f jest postaci $f(x) = ae^x$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.