

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2025/2026
zadania na ćwiczenia, 24 II 2026

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Wykazać, że funkcja f jest różniczkowalna w 0.
(b) Podać przykład takich ciągów punktów $x_n \neq y_n$, że $x_n, y_n \neq 0$ i zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \neq f'(0).$$

Zadanie 2. Załóżmy, że f jest różniczkowalna w punkcie x_0 . Obliczyć granicę

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Rozstrzygnąć, czy z istnienia powyższej granicy wynika istnienie pochodnej $f'(x_0)$.

Zadanie 3. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. W jakich punktach funkcja $g(x) = |f(x)|$ jest różniczkowalna?

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 pochodne jednostronne, to jest w tym punkcie ciągła.

Zadanie 5. Zbadać różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$$