

Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2024/2025

zadania domowe, seria 6.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach w czwartek **12 VI 2025** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx.$$

Zadanie 2. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a)

$$f(x) = \int_0^{x^2} t \sin t \, dt$$

(b)

$$g(x) = \int_{-\sin x}^{\sin x} \ln(1 - t^2) \, dt$$

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą spełniającą

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0.$$

Wykazać, że istnieje $\theta \in (a, b)$ takie, że

$$\int_a^\theta f(x) \, dx = f(\theta).$$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x} dx$$

(c)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^a \sin^2 x} dx, \quad a > 0$$

Zadanie 5. Obliczyć granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{2n^2 + kn - k^2}}{n^2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{k^2}{n^4} e^{k^2/n^2}$