

Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2024/2025

zadania domowe, seria 5.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach w czwartek **29 V 2025** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Załóżmy, że współczynniki $c_p, c_{p+1}, \dots, c_q$ są nierosnące i nieujemne. Wykazać, że dla $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{n=p}^q c_n e^{inx} \right| \leq \frac{c_p}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć promień zbieżności R szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

i wykazać, że jego suma $f(x)$ spełnia dla $x \in (-R, R)$ równanie $f'(x) = 1 + xf(x)$.

Zadanie 3. Wyznaczyć jawny wzór na sumę szeregu potęgowego danego wzorem:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Zadanie 4. Dla zadanego ciągu a_n niech $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ oraz $T_n = \frac{S_0 + \dots + S_n}{n+1}$. Wykazać, że jeśli ciąg T_n jest ograniczony, to szeregi potęgowe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n x^n$$

są zbieżne dla $|x| < 1$ oraz zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n x^n.$$

Zadanie 5. Rozwinąć następujące funkcje w szereg Taylora wokół 0 i określić, na jakim zbiorze otrzymany szereg jest zbieżny:

(a) $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$