

# Analiza matematyczna I.2

## semestr letni 2024/2025

### zadania domowe, seria 4.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **13 V 2025** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

**Zadanie 1.** Zbadać zbieżność punktową i jednostajną poniższych ciągów funkcji  $f_n$  dla podanych zbiorów  $A$ :

(a)  $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$ ,  $A = (0, \infty)$

(b)  $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ ,  $A = (-c, c)$ ,  $c > 0$ , oraz  $A = \mathbb{R}$

(c)  $f_n(x) = (1 + x^n)^{1/n}$ ,  $A = [0, 1]$

**Zadanie 2.** Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$$

jest dobrze określona i ciągła dla każdego  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Zadanie 3.** Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln(1 + n^2 x^2)$$

jest dobrze określona i ciągła na  $\mathbb{R}$ , a następnie, że jest klasy  $C^1$  na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Rozstrzygnąć, czy  $f$  jest różniczkowalna w 0.

**Zadanie 4.** Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin x|^{\sqrt{n}}$$

jest dobrze określona i ciągła na  $(-1, 1)$ , a następnie zbadać jej różniczkowalność na tym przedziale.

**Zadanie 5.** Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{x+n}}$$

na przedziale  $[0, \infty)$ .