

Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2024/2025

zadania domowe, seria 3.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **15 IV 2025** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Obliczyć granice:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \sqrt{\cos 2x}}{x^2 \ln \cos x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x \cdot \operatorname{tg}(x \sin x)} - \frac{1}{x^2 \sin^2 x} \right)$

Zadanie 2. Wyznaczyć $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, aby granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{x^\alpha}$$

istniała oraz była różna od $0, \pm\infty$.

Zadanie 3. Wykazać, że dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzi nierówność $x^x y^y \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}$.

Zadanie 4. Wykazać, że funkcja dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

jest n -krotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.