

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 12 VI 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że ciąg funkcji ciągłych $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zadany jako $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)$ spełnia $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ dla każdego $x \in [0, 1]$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = +\infty$.

Zadanie 2. Obliczyć granice:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \ln \left(x + \frac{x^5}{n} \right) dx$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sqrt[n]{x} \sin x dx$$

(b)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx$$

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx dx$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx.$$

Zadanie 4. Rozpatrzmy ciąg funkcji $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zadanych jako

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że $f_n \Rightarrow 0$ na $\mathbb{R}$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx \neq 0$.