

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 10 VI 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

(d)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a (-\ln x)^b} dx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(b)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$$

(e)

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} dx$$

(c)

$$\int_0^1 (-\ln x)^a dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

(f)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\pi} \frac{(\sin x)^a}{x^b} dx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną taką, że całka $\int_0^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna. Wykazać równość

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{\infty} f(x) dx,$$

a następnie korzystając z niej obliczyć granicę

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{1+h^2 n^2}.$$