

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 5 VI 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Obliczyć granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{k}{n^2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{n+2} \dots (2n)^{2n}}{n^{n+1}n^{n+2} \dots n^{2n}}}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą nieujemną. Wykazać, że jeśli

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

to funkcja f jest tożsamościowo równa zeru.

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że dla dowolnej funkcji ciągłej $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Wykazać, że funkcja f jest tożsamościowo równa zeru.

Zadanie 4. Załóżmy, że $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi

$$\int_a^b f(x)x^n dx = 0.$$

Wykazać, że funkcja f jest tożsamościowo równa zeru.

Zadanie 5. Obliczyć granice:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^4 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5 + 1} dx \right)$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{x}{x^5 + 1} dx \right)$$