

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 27 V 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć wzór rekurencyjny na I_n , $n \geq 1$, dla:

(a)

$$I_n = \int \frac{1}{\sin^n x} dx$$

(b)

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(c)

$$I_n = \int \operatorname{ctg}^n x dx$$

Zadanie 2. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

(a)

$$\int \cos^3 x dx$$

(c)

$$\int \cos^2 \sqrt{x} dx$$

(e)

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

(b)

(d)

$$\int \frac{1}{1 + e^{x/2} + e^{x/3} + e^{x/6}} dx$$

$$\int x^x (1 + \ln x) dx$$

(f)

$$\int \sin \ln x dx$$

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Wykazać dla dowolnego $a > 0$ następujące fakty:

(a) Jeśli f jest nieparzysta, to $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(b) Jeśli f jest parzysta, to $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

(c) Jeśli f jest okresowa o okresie T , to $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

Zadanie 4. Wykazać dla dowolnych $p, q > 0$ równość

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q dx = \int_0^1 x^q (1-x)^p dx.$$

Zadanie 5. Obliczyć następujące całki oznaczone:

(a)

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx$$

(c)

$$\int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$$

(d)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx$$

Zadanie 6. Wykazać, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi tożsamość

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,$$

a następnie obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}, n \in \mathbb{N}.$$