

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 20 V 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma skończony promień zbieżności $R > 0$.
Wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n a_n x^{n^3}$.

Zadanie 2. Niech F_n będzie ciągiem Fibonacciego, $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Wykazać, że szereg $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, a następnie wyprowadzić wzór

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

i wykorzystać go do znalezienia jawnego wzoru na F_n .

Zadanie 3. Wykazać wzór

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Zadanie 4. Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ dla $x < 1$. Wyznaczyć $F^{(n)}(0)$.

Zadanie 5. Rozwinąć następujące funkcje w szereg Taylora wokół punktu x_0 :

(a) $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$, $x_0 = 0$, $x \in (-1, 1)$

(b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $x_0 = 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$