

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 13 V 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

są zbieżne jednostajnie dla $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$, gdzie $\delta > 0$. Zbadać analogiczną zbieżność dla szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\theta}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Zadanie 2. Zbadać ciągłość sumy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{nx} \cos \frac{x}{n}$$

na przedziale $(0, \pi)$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}}$$

na przedziale $[-A, A]$, $A > 0$.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$$

na przedziale $[a, \infty)$, $a > 0$.

Zadanie 5. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)^2$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze A oraz spełnia

$$\sup_{x \in A} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)^2 < \infty.$$

Wykazać, że jeśli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na A .

Zadanie 6. Załóżmy, że współczynniki $c_p, c_{p+1}, \dots, c_q$ są nierosnące i nieujemne. Wykazać, że dla $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{n=p}^q c_n e^{inx} \right| \leq \frac{c_p}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$