

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 6 V 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (x - n)^2}$$

jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy ciągi funkcyjne f_n, g_n określone jako

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n,$$
$$g_n(x) = \frac{1}{n} \sin \left(n \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Wykazać, że są one zbieżne jednostajnie na $\mathbb{R}$, a pomimo to mamy

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]_{x=1}' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(1),$$
$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \right]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n'(x).$$

Zadanie 3. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $(0, \infty)$.

Zadanie 4. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2} \right)$$

dla $x > 0$.

Zadanie 5. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{x^2 + n^2}.$$

dla $x \in \mathbb{R}$.