

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 24 IV 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać zbieżność jednostajną poniższych szeregów funkcyjnych na podanym zbiorze A :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n^2(1+x^2)) \right), A = \mathbb{R}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, A = [2, \infty)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2 x}, A = [0, \infty)$

Zadanie 2. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in A$, jest zbieżny jednostajnie na zbiorze A .

Wykazać, że jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)f_n(x)$, $x \in A$ również jest zbieżny jednostajnie na zbiorze A . Podać przykład, że założenie ograniczoności f jest konieczne.

Zadanie 3. Wykazać, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Zadanie 4. Zbadać, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ jest zbieżny jednostajnie na odcinku $[0, 1]$.

Zadanie 5. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$, lecz nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym przedziale postaci $[-a, a]$, $a > 0$.