

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 10 IV 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną poniższych ciągów funkcji f_n dla podanych zbiorów A :

(a) $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$, $A = (0, \infty)$

(b) $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$, $A = (0, 1)$

(c) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$, $A = (0, 1)$

(d) $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})$, $A = \mathbb{R}$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu f_n na zbiorze $A = (0, \infty)$ oraz $B = (0, a]$, $a > 0$, gdzie

$$f_n(x) = n^2 \frac{1 - \cos \frac{x}{n}}{x}.$$

Zadanie 3. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu f_n na zbiorze $A = [0, 1]$, gdzie

$$f_n(x) = n^3 x e^{-nx^2}.$$

Zadanie 4. Wykazać, że granica punktowa funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną. Określamy ciąg funkcyjny $f_n(x) = n \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right)$. Wykazać, że wówczas $f_n \rightrightarrows f'$.

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli ciąg wielomianów jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$, to jego granica jest wielomianem.