

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 8 IV 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną spełniającą $f(a) = f(b) = 0$. Wykazać, że jeżeli istnieje druga pochodna f w (a, b) , to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

Zadanie 2. Załóżmy, że funkcja $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i oznaczmy

$$M_k = \sup \left\{ |f^{(k)}(x)| : x \in (0, \infty) \right\}, k = 0, 1, 2.$$

Wykazać, że jeśli $M_0, M_1, M_2 < \infty$, to zachodzi nierówność $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną poniższych ciągów funkcji f_n na zbiorze $A = [0, 1]$:

(a) $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx-1)^2}$

(b) $f_n(x) = x^n(1-x)$

(c) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$