

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 3 IV 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x^\alpha} = 1.$$

Zadanie 2. Korzystając z reguły de l'Hospitala wyznaczyć granice:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctg \frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$

Zadanie 3. Dla $a > 0$, $a \neq 1$, wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a-1)} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Zadanie 4. Załóżmy, że $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2 spełniającą $f(0) = 0$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \rfloor} f(kx).$$