

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2024/2025
zadania na ćwiczenia, 1 IV 2025

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że f jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną w pewnym otoczeniu 0, spełniającą $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 6$. Niech $h(x) = f(f(x))$. Udowodnić, że istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli $|x| < \delta$, to $|h(x)| < x$.

Zadanie 2. Wykazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ i dowolnej funkcji $f \in C^2(\mathbb{R})$ spełniającej warunki $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$ prawdziwa jest równość

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right)^x = e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Zadanie 3. Korzystając z reguły de l'Hospitala wyznaczyć granice:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$