

# Analiza matematyczna I.2

## semestr letni 2023/2024

### zadania domowe, seria 8.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **11 VI 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

**Zadanie 1.** Załóżmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(x)}{x} dx.$$

**Zadanie 2.** Obliczyć następujące całki niewłaściwe:

(a)

$$\int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{x} dx, n \in \mathbb{N}$$

(b)

$$\int_0^1 x^n (1-x)^\alpha dx, \alpha > -1$$

**Zadanie 3.** Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

$$\int_0^\infty e^{\cos x} \sin(\sin x) \frac{1}{x} dx$$

oraz

$$\int_0^\infty e^{\sin x} \sin(\sin x) \frac{1}{x} dx.$$

**Zadanie 4.** Zbadać dla  $a, b > 0$  zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^a |\sin x|^b}{e^{x^2} - 1} dx.$$

**Zadanie 5.** Załóżmy, że  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą i okresową o okresie  $T > 0$ . Wykazać dla dowolnych  $a$  i  $b$  równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(nx) dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x) dx.$$