

Analiza matematyczna I.2  
semestr letni 2023/2024  
zadania domowe, seria 7.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **4 VI 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

**Zadanie 1.** Wyznaczyć granice:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n^5}{(n^2 + k^2)^3}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right)$$

**Zadanie 2.** Załóżmy, że  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą.

(a) Wykazać, że jeśli dla dowolnego  $n \geq 0$  zachodzi

$$\int_{-a}^a x^{2n} f(x) dx = 0,$$

to  $f$  jest funkcją nieparzystą na  $[-a, a]$ .

(b) Wykazać, że jeśli dla dowolnego  $n \geq 0$  zachodzi

$$\int_{-a}^a x^{2n+1} f(x) dx = 0,$$

to  $f$  jest funkcją parzystą na  $[-a, a]$ .

**Zadanie 3.** Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a)

$$f(x) = \int_0^{x^2} t \sin t dt$$

(b)

$$g(x) = \int_{-\sin x}^{\sin x} \ln(1 - t^2) dt$$

**Zadanie 4.** Załóżmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą spełniającą

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Wykazać, że istnieje  $\theta \in (a, b)$  takie, że

$$\int_a^\theta f(x) dx = f(\theta).$$

**Zadanie 5.** Załóżmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją klasy  $C^1$  oraz że  $f(a) = 0$ . Niech  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . Wykazać nierówność

$$M \leq \sqrt{(b-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx}.$$