

Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2023/2024

zadania domowe, seria 6.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **21 V 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Wyznaczyć promień zbieżności R szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

i wykazać, że jego suma $f(x)$ spełnia dla $x \in (-R, R)$ równanie $f'(x) = 1 + xf(x)$.

Zadanie 2. Rozaprzmy ciąg C_n określony wzorem rekurencyjnym

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k},$$

przy czym przyjmujemy $C_0 = 1$. Wyznaczyć jawny wzór na C_n .

Zadanie 3. Niech $f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x^2-2x+5)}$. Wyznaczyć $f^{(100)}(1)$.

Zadanie 4. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

(a)

$$\int \frac{1}{x^4 - 1} dx$$

(b)

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

(c)

$$\int \frac{1}{5x^2 + 2x + 1} dx$$

Zadanie 5. Wyznaczyć wzór rekurencyjny na I_n , $n \geq 1$, dla:

(a)

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 4)^n} dx$$

(b)

$$I_n = \int \frac{1}{x(1-x^2)^n} dx$$