

Analiza matematyczna I.2  
semestr letni 2023/2024  
zadania na ćwiczenia, 11 VI 2024

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Rozpatrzmy funkcję monotoniczną  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $\int_0^1 x^\alpha f(x) dx < \infty$  dla pewnego  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wykazać, że wówczas  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha+1} f(x) = 0$ .

**Zadanie 2.** Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x} dx$$

(c)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^a \sin^2 x} dx, \quad a > 0$$

**Zadanie 3.** Rozpatrzmy ciąg funkcji  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zadanych jako

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że  $f_n \rightrightarrows 0$  na  $\mathbb{R}$ , ale  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx \neq 0$ .