

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 7 VI 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$	(d) $\int_0^1 \frac{1}{x^a (-\ln x)^b} dx, \quad a, b \in \mathbb{R}$
(b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$	(e) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} dx$
(c) $\int_0^1 (-\ln x)^a dx, \quad a \in \mathbb{R}$	(f) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\pi} \frac{(\sin x)^a}{x^b + (\pi - x)^c} dx, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 3. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha > 0$	(c) $\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx$
(b) $\int_1^{\infty} \frac{ \sin x }{x} dx$	(d) $\int_1^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha > 0$

(e)

$$\int_1^{\infty} \ln^{\alpha} x \frac{\sin x}{x} dx$$

(f)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

Zadanie 4. Załóżmy, że $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną taką, że całka $\int_0^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna. Wykazać równość

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{\infty} f(x) dx,$$

a następnie korzystając z niej obliczyć granicę

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{1 + h^2 n^2}.$$