

Analiza matematyczna I.2  
semestr letni 2023/2024  
zadania na ćwiczenia, 4 VI 2024

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Podać przykład takiego ciągu funkcji ciągłych  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , że  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  dla każdego  $x \in [0, 1]$ , ale  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = +\infty$ .

**Zadanie 2.** Obliczyć granice:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \ln \left( x + \frac{x^5}{n} \right) dx$$

(b)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \sqrt[n]{x} \sin x dx$$

**Zadanie 3.** Załóżmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją klasy  $C^1$ . Wykazać, że istnieje taki ciąg wielomianów  $P_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , że  $P_n \rightrightarrows f$  oraz  $P'_n \rightrightarrows f'$  na  $[a, b]$ .

**Zadanie 4.** Załóżmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx dx$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx.$$

**Zadanie 5.** Dla  $0 < a < b$  wyznaczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx.$$

**Zadanie 6.** Załóżmy, że  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą. Wyznaczyć granice:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \int_0^1 x^n f(x) dx \right)$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \int_0^1 e^{-nx} f(x) dx \right)$$