Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 28 V 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i nieujemną. Niech $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(x)^n \, dx \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

Zadanie 2. Załóżmy, że funkcje $f, g, f^2, g^2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne. Wykazać nierówność

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1. Oznaczmy

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x) \, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Wyznaczyć $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$.

Zadanie 4. Korzystając z definicji całki Riemanna wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1},$$

a następnie korzystając z poprzedniego zadania udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 5. Obliczyć granice:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^4 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5+1} \, dx \right)$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3\int\limits_{n}^{2n}\frac{x}{x^5+1}\,dx\right)$$