

Analiza matematyczna I.2  
semestr letni 2023/2024  
zadania na ćwiczenia, 24 V 2024

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Załóżmy, że  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą taką, że istnieje skończona granica  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

**Zadanie 2.** Obliczyć granice:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{k}{n^2}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{2n^2 + kn - k^2}}{n^2}$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{\frac{(n+1)^{n+1} (n+2)^{n+2} \dots (2n)^{2n}}{n^{n+1} n^{n+2} \dots n^{2n}}}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$

**Zadanie 3.** Załóżmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą nieujemną. Wykazać, że jeśli

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

to funkcja  $f$  jest tożsamościowo równa zeru.

**Zadanie 4.** Załóżmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą taką, że dla dowolnej funkcji ciągłej  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zachodzi

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Wykazać, że funkcja  $f$  jest tożsamościowo równa zeru.

**Zadanie 5.** Załóżmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą taką, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  zachodzi

$$\int_a^b f(x)x^n dx = 0.$$

Wykazać, że funkcja  $f$  jest tożsamościowo równa zeru.

**Zadanie 6.** Załóżmy, że  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx.$$