

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 21 V 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = \int_x^{\sqrt{x^2+1}} \sin t^2 dt.$$

Wyznaczyć $f'(x)$.

Zadanie 2. Wyznaczyć minimum oraz maksimum funkcji

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2} dt$$

na przedziale $[-1, 1]$.

Zadanie 3. Niech $f(0) = 0$ i $f(x) = \frac{x}{|x|}$ dla $x \neq 0$. Czy istnieje taka funkcja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $F'(x) = f(x)$? Jeśli tak, znaleźć ją.

Zadanie 4. Rozpatrzmy funkcje $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadane następująco: $f(x) = g(x) = \cos \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$, natomiast $f(0) = 0$, a $g(0) = \frac{1}{2}$. Wykazać, że jedna z tych funkcji ma funkcję pierwotną zadaną na \mathbb{R} , natomiast druga nie.

Zadanie 5. Obliczyć granice:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt}$$

Zadanie 6. Wyznaczyć wprost z definicji całki Riemanna całki oznaczone:

(a)

$$\int_0^1 x^2 dx$$

(b)

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

(c)

$$\int_0^{10} 2^x dx$$