

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 17 V 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Wykazać dla dowolnego $a > 0$ następujące fakty:

(a) Jeśli f jest nieparzysta, to $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(b) Jeśli f jest parzysta, to $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

(c) Jeśli f jest okresowa o okresie T , to $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

Zadanie 2. Wykazać dla dowolnych $p, q > 0$ równość

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \int_0^1 x^q(1-x)^p dx.$$

Zadanie 3. Obliczyć następujące całki oznaczone:

(a)

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx$$

(c)

$$\int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$$

(d)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx$$

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi tożsamość

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,$$

a następnie obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}, n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i parzystą, to zachodzi tożsamość

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = \int_0^a f(x) dx.$$